ИССЛЕДОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ В ОБЛАСТИ ЭФФЕКТИВНОСТИ, НАДЕЖНОСТИ И БОЕВОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВООРУЖЕНИЯ И ВОЕННОЙ ТЕХНИКИ

УДК 621.642

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Н. А. Северцев

Введение

Для определения качества функционирования сложной технической системы (СТС) необходимо контролировать ее параметры. Будем предполагать, что в каждый момент времени известно, в каком положении находятся все подсистемы (элементы) СТС. Это означает, что все внутренние переменные системы измерения могут быть измерены и представлены в качестве выходных значений параметров, которые определяются при прямых, косвенных, совместных и других видах измерений. Результаты всех измерений дают информацию о тех или иных свойствах исследуемой СТС (объекта) [1, 2]. Соответствие значений параметров нормам, установленным в эксплуатационной документации, означает, что СТС (объект) измерения обладает набором требуемых свойств.

Модель оценки математического ожидания параметра системы

Примем в качестве сложной технической системы военную технику (ВТ), выходные характеристики каждого из представителей ВТ являются случайными векторами (функциями времени), случайные реализации которых проявляются в ходе эксплуатации и испытаний систем. Для управления параметрами СТС в ходе проектирования и отработки параметров требуются знания законов их распределения. Знания последних позволяют проводить анализ и строить модели безопасности их функционирования.

Будем пользоваться случайными характеристиками ВТ, законы распределения которых реализуются при отработке и испытаниях. По этим реализациям случайных процессов необходимо идентифицировать их законы распределения.

Решение проблемы оценки параметров распределений осложняется в силу малого числа натурных испытаний (малой статистики наблюдений). Следует иметь в виду, что в ходе доработки изделия на основе проведенных испытаний вероятен уход параметров испытуемой системы за счет внесения изменений в конструкцию системы в процессе проведения экспериментов и отработки системы.

Представим методы оценивания математического ожидания параметров ВТ как случайные функции, для которых оценки параметров случайных процессов могут быть определены с помощью построения математических моделей с параметрами в виде случайных векторов.

Пусть мы имеем серию экспериментов *i, i* = 1, ..., *n*, в каждом из которых получены взаимно некоррелированные оценки реализаций характеристик испытуемой системы вектора $\bar{x}_j = \{\bar{x}_{ji}\}$ или функции $\bar{x}_j = (t)$, $t \in [t_0, t_k]$. Погрешности для оценок не смещены и характеризуются ковариационной матрицей $K_{\bar{x}_i}(t, t')$ для функции $x(t)$. Примем, что неизвестное математическое ожидание характеристик СТС $M[x] = \{M[x_j]\}$ или $M[x(t)] = M_x(t)$ при проведении испытаний не меняется. Представим модель совокупности испытаний отдельно для каждого параметра x_j или значения $x(t)$ при фиксированном аргументе t:

$$M[x_j] + \delta_{xji} + \delta_{ji} = \bar{x}_{ji}, \; j = 1, ..., i;$$

$$M_x(t) + \delta_{xi}(t) + \delta_i(t) = \bar{x}_i(t); \; t \in [t_0, t_x], \tag{1}$$

где δ_{xji}, $\delta_{xi}(t)$ – случайные отклонения характеристики СТС от математического ожидания; $\delta_j(t)$, $\delta_i(t)$ – погрешности точечных оценок характеризуются дисперсиями $\bar{\sigma}^x_{xjt}$ и $\bar{\sigma}^x_{xi}(t)$, а также они характеризуются дисперсиями $\bar{\sigma}^2_{ji} = K_{\bar{x}_j t}$ и $\bar{\sigma}^2_{\delta xi}(t) = K_{\bar{x}_i(t, t')}$, которые определяются по диагональным элементам матриц $K_{\bar{x}_i}$ или по значениям корреляционной функции $K_{\bar{x}_i(t, t')}$ или $t = t'$.

Суммарное отклонение $\sigma_{\sum ji} = \delta_{xi} + \delta_{ji}$ и $\sigma_{\sum i}(t) = \delta_{xi}(t) + \delta_i(t)$ и их дисперсии выразятся следующим образом:

$$\sigma^2{}_{\sum ji} = \sigma^2{}_{xji} + \sigma^2{}_{\delta ji};$$

$$\sigma^2{}_{\sum ji}(t) = \sigma^2{}_{xi}(t) + \sigma_{\delta i}(t). \tag{2}$$

Тогда модель (1) связи полученных оценок реализации характеристик исследуемой СТС (ВТ) и неизвестного математического ожидания выразится как

$$M[x_j] + \delta_{\sum ji} = x_{ji}, \; j = 1, ..., j;$$

$$M_x(t) = \delta_{\sum i} = \bar{x}_i(t), \; t \in [t_0, t_x], \; i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

При оценивании математического ожидания характеристик СТС в качестве критерия оптимальности примем минимум дисперсии получаемых оценок. Также оценки будут соответствовать взвешенному методу наименьших квадратов:

$$M[x_j] = \sigma^2_{\bar{M}[xj]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}_{ji}}{2};$$

$$\sigma^2_{\bar{M}[xj]} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2_{\sum i(t)}};$$

$$\bar{M}_x(t) = \sigma^2_{\bar{M}x}(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}_j(t)}{\sigma^2_{\sum i(t)}};$$

$$\sigma^2_{\bar{M}x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2_{\sum i(t)}} \right). \tag{4}$$

Если характеристики ВТ являются случайным полем $x(t_1, t_2, ..., t_n)$, то математическое ожидание (МО) можно получить на основе оценок реализации поля $\overline{x}_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ в каждой точке пространства $O\ t_1, t_2, \dots, t_n$ по формулам, аналогичным (4), с помощью которых МО преобразуются к простому виду средних значений:

$$\overline{M}[x_j] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_{ji}\ ;\ \sigma^2_{\overline{M}[xj]} = \frac{\sigma^2_{\sum i}}{n}\ ;$$

$$\overline{M}_x(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i(t)\ ;\ \sigma^2_{\overline{M}x}(t) = \frac{\sigma^2_{\sum i}(t)}{n}\ . \qquad (6)$$

При достаточном объеме испытаний и в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей точечные оценки МО имеют приближенное нормальное распределение, которое можно использовать при поиске доверительного интервала для МО.

В случае, если дисперсии $\sigma^2_{\sum i}$ и $\sigma^2_{\sum i(t)}$ неизвестны, а оцениваются по экспериментальным данным, то при нормально распределенных реализациях $\overline{x}_{ji}$ или $\overline{x}_i(t)$ для интервальной оценки МО характеристик ВТ можно использовать распределение Стьюдента. При ограниченном объеме испытаний оценки МО могут иметь значительные погрешности. В этом случае точность МО случайных функций и характеристик СТС (ВТ) можно повысить, если повысить дополнительный анализ полученных значений $\overline{M}_x(t)$ или $\overline{M}_x(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Пусть реализация точечных оценок $\overline{M}_x(t)$ на отрезке времени $[t_0, t_k]$ имеет нерегулярный характер из-за случайных погрешностей. Для повышения точности можно сгладить функцию $\overline{M}_x(t)$, для этого необходимо настроить модель изменения МО $M_{xmoo}(t) = F_t\{aq\}, q = 1, ..., Q,$ совершающую ограниченное число неизвестных параметров aq. Тогда используем физико-математические или формальные многочленные модели.

После этого необходимо производить смешивание данных $\hat{M}_x(t_y),$ взятых в дискретные моменты t_v, $v = 1, ..., N$, $N >> Q$ созданной выбранной математической моделью одним из методов, изложенных выше.

Полученные оценки $M_{xmoo}(t)$ имеют меньший уровень случайности погрешностей за счет сглаживания. Если принятая модель $\hat{M}_{xmoo}(t)$ имеет незначительные погрешности, оценки $M_{xmoo}(t_y)$ имеют постоянную дисперсию $\sigma^2_{\overline{M}x}(t_y) = \sigma^2_{\overline{M}x}$, то дисперсия полученных оценок будет иметь вид

$$\sigma^2_{\overline{M}xoo}(t_y) = \sigma^2_{\overline{M}x}\frac{Q}{N_{\text{нек}}},\ N_{\text{нек}} >= Q;$$

$$\sigma^2_{Mxoo}(t_y) = \sigma^2_{\overline{M}x},\ N_{\text{нек}} < 0, \qquad (7)$$

где $N_{\text{нек}}$ – число некоррелированных данных в общем выборе.

Если случайная функция исследуемой СТС, например беспилотного летательного аппарата или любого летательного аппарата ВТ, обладает эргодическими свойствами по отношению к МО, то оценку МО можно получить по одной реализации $x(t)$ на основе сглаживания ее выборочной математической моделью $M_{xмoo}(t)$. Таким же аналогичными образом можно повысить точность оценки МО случайного поля характеристики исследуемой системы, если сформулировать многомерную модель $M_{xmoo}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ изменения МО в пространстве О $t_1, t_2, \dots, t_n$.

МО характеристики исследуемой системы может иметь тренд, что проявляется в систематическом изменении реализации X_{ji} или $X_x(t)$ при фиксированном t в процессе i-х испытаний.

Для оценки тренда необходимо выразить его в виде некоторой модели:

$$M_{xmoo}[X_{ji}] = b_{1j} + F_j(i, \{b_{gj}\})\ \text{ или}$$

$$M_{xmoo}(t,i) = b_1(t) + F_i(i,\{b_g(t)\})$$

с ограниченным числом параметров b_g, $g = 1, ..., G < n$.

В этом случае модель (3) для серии испытаний можно записать в виде

$$b_1 j + F_j(t,\{b_g i\}) + \delta_{\sum ji} = \bar{x}_i(t);$$

$$b_1(t) + F_j(t,\{b_g(t)\}) + \delta_{\sum i} = \bar{x}_i(t).$$

На основании (8) оцениваются параметры модели b_g одним из статистических методов, а потом оценивается МО характеристики исследуемой системы БЛА или ЛА и др. В рамках выбранной МО для любого законного эксперимента ($i = 1, \ldots, n$) или будущих испытаний (экспериментов) про $i > n$.

Изложенные методы моделирования оценивания МО характеристик исследуемой системы обладают рядом достоинств. Они требуют знания законов распределения оценок реализации в каждом испытании, обеспечивают требуемые свойства получаемых оценок (несмешанность, состоятельность, эффективность), обладают оперативностью.

Однако при использовании указанных методов необходимо знать модели МО и погрешностей оценок реализаций в процессе проведения натурных испытаний с ТС ВТ.

Дисперсии случайных характеристик исследуемых систем необходимо знать для определения возможных отклонений реализаций характеристик системы при целевом применении, для оценивания параметрической работоспособности системы и для контроля соответствия характеристик системы требованиям технического задания, а также для прогнозирования характеристик и планирования целевого применения системы.

Рассмотрим задачу оценивания дисперсии компонентов случайного вектора $X = \{x_j\}$ или случайной функции характеристик исследуемой системы $x(t)$ при фиксированном $t \in [t_0, t_k]$ по серии испытаний создаваемой системы. Наибольшую информацию о дисперсии имеют квадраты отклонений оценок реализаций характеристик $\bar{x}_{ij}$ или $\bar{x}_i(t)$, получаемых в i-х испытаниях от оценок математических ожиданий в виде

$$d_{ji} = K_j\{\bar{x}_{ji} - M[X_{ji}]\}2\,,\; j = 1, \ldots, j \text{ или}$$

$$d_i(t) = K(t)\{\bar{x}_i(t) - M_{xi}(t)\}2\,,\; t \in [t_0, t_k]\,, \tag{1}$$

где K_j, $K(t)$ – коэффициенты, вводимые для обеспечения несмешанности оценок дисперсии по данным выражения (1):

$$K = n / n - G\,,$$

где G – число параметров математической модели, описывающей изменение МО в процессе i-х экспериментов при постоянном МО $G = 1$.

Дисперсия случайных отклонений оценок реализаций характеристик исследуемой системы от МО ($D_{\sum ji}$, для параметра x_j или $D_{xi}(t)$ для функции $x(t)$) складывается из дисперсий самой характеристики исследуемой системы (например БЛА, ЛА и пр.) D_{xji} или $D_{xi}(t)$, в котором i-м испытании и дисперсии погрешностей оценок реализаций характеристик $D_{\delta ji} = \sigma^2_{\delta ji}$ или $D_{\delta i}(t) = \sigma^2_{\delta i}(t)$:

$$\bar{D}_{\sum ji} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ji} = \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}\{\bar{x}_{ji} - \bar{M}[x_{ji}]\}^2,\; J = 1, \ldots, i \tag{4}$$

$$D_{\sum i}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i(t) = \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}\{\bar{x}_i(t) - \bar{M}_x(t)\}^2,\; t \in [t_0, t_k].$$

Эта оценка совпадает с известной несмешанной эффективной оценкой дисперсии по n независимым испытаниям при неизвестном МО, на основании (4) с учетом (2) определяются оценки дисперсий характеристик исследуемой системы, если известны оценки дисперсий погрешностей определения реализаций $\bar{D}_{\delta j}$ или $\bar{D}_{\delta}(t)$:

$$\bar{D}_{xj} = \bar{D}_{\sum j} - \bar{D}_{\delta j} \text{ или } \bar{D}_{x}(t) = \bar{D}_{\sum}(t) - \bar{D}_{\delta}(t). \quad (5)$$

Оценки суммарных дисперсий $\bar{D}_{\sum ji}$ или $\bar{D}_{\sum}(t)$ или нормально распределенных $D_{\sum ji}$ или $\bar{D}_{\sum}(t)$ реализаций характеристик $\bar{x}_{ji}$ или $\bar{x}_{i}(t)$ имеют ξ^2 распределение [4]:

$$\sigma^2_{\bar{D}_{\sum j}} = \frac{2\bar{D}^2_{\sum j}}{(n-G)};$$

$$\sigma^2_{D_{\sum(t)}} = \frac{2\bar{D}^2_{\sum(t)}}{(n-G)}. \quad (6)$$

При достаточно большом количестве испытаний создаваемой и испытываемой системы распределение дисперсий оценок стремится к нормальному. Погрешности оценок дисперсий характеристик испытываемой СТС дополнительно зависят от погрешностей оценок дисперсий $\bar{D}_{\delta j}$ или $\bar{D}_{\delta j}(t)$, т.е.:

$$\sigma^2_{D_{\sum j}} = \sigma^2_{\bar{D}_{\sum j}} + \sigma^2_{\bar{D}_{\delta j}};$$

$$\sigma^2_{\bar{D}_{x}(t)} = \sigma^2_{\bar{D}_{\sum(t)}} + \sigma^2_{D_{\delta}(t)}. \quad (7)$$

При ограниченном объеме испытаний и значительных погрешностей $\sigma^2_{\bar{D}_{\delta j}}$ или $\sigma^2_{D_{\delta}(t)}$ точность определения дисперсий характеристик исследуемой СТС по формулам (4) и (5) получается не совсем удовлетворительной, т.е. невысокой. Для устранения этого *i*-го недостатка повышения точности оценивания суммарной дисперсии $\bar{D}_{\sum}(t)$ следует провести дополнительный анализ получаемой реализации на отрезке времени $[t_0, t_k]$.

Функция $\bar{D}_{\sum}(t)$ имеет нерегулярный характер из-за случайных погрешностей оценивания. Обычно дисперсия изменяется плавно, и это изменение можно описать некоторой моделью:

$$D_{\sum Moo}(t) = F(t\{C_r\}),$$

в которую входит ограниченное число неизвестных параметров C_r, $r = 1,..., R$ [2]. Имея модель, можно данные $\hat{D}_{\Sigma}(t)$, взятые в дискретные моменты времени $t \in [t_0, t_k]$, $V = 1,\dots, N >> R$, сгладить и получить реализацию оценки дисперсии в рамках этой модели методом наименьших квадратов. Дисперсия многомерных случайных характеристик СТС $x(t_1, t_2, \dots, t_N)$ оценивается по данным нескольких испытаний, как и для случайной функции $x(t)$ с заменой в зависимостях (4)–(7) аргумента t на точку пространства О $t_1, t_2, \dots, t_N$. В этом случае, когда дисперсия характеристик испытываемой СТС изменяется в процессе проведения испытаний, для ее оценивания необходимо формировать математическую модель:

$$D_{\sum Mo\delta} ji = F(i\{e\}) \text{ или } D_{\sum Mo\delta}(t) = F_i(i\{e_p(t)\}).$$

Зависимость суммарной дисперсии от номера I с ограниченным числом неизвестных параметров $e_{p,} p = 1, ..., p < n$. В соответствии с этой моделью систему (3) связи неизвестных данных с неизвестной дисперсией можно представить в виде

$$F_i(i, \{e_p\}) + \xi_{ji} = d_{ji} \text{ или } F_i(i, \{e_p(t)\}) + \xi_i(t) = d_i(t), \quad (8)$$

где ξ – случайные отклонения.

На основании (8) определяются оценки параметров e_p одним из методов, изложенных выше, а затем вычисляются оценки суммарной дисперсии по принятой модели при значениях $\{\overline{e}_p(t)\}$. Дисперсии характеристик испытываемой и создаваемой СТС оцениваются по зависимостям (5)–(7). Достоинством изложенных методов оценки дисперсии характеристик испытываемой и создаваемой СТС является их сравнительная простота и удовлетворительные свойства получаемых оценок: несмешенность, состоятельность, эффективность. Однако в некоторой мере неопределенность законов распределения получаемых оценок дисперсий характеристик создаваемой и испытываемой СТС ВТ затрудняет в некоторой мере проведение интервального оценивания дисперсии характеристик ВТ [5, 6]. При исследовании любых СТС на условия безопасности функционирования на доказательной (математической) базе, без определения математического ожидания и дисперсии такие исследования будут неполными и неадекватными в предметных приложениях.

Список литературы

1. Северцев, Н. А. Метод оценки показателей безопасности автономных динамических систем / Н. А. Северцев, А. Н. Катулев // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 17–26.
2. Северцев, Н. А. Системный анализ определения параметров состояния и параметры наблюдения объекта для обеспечения безопасности / Н. А. Северцев // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 4–10.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. Н. Овчаров. – М. : Высшая школа, 2003. – 430 с.
4. Иванющенко, А. С. Методологические основы испытаний сложных систем. Кн. 1. Математическое обеспечение испытаний летательных аппаратов / А. С. Иванющенко. – М. : Техн. инф. сист., 2002. – 367 с.
5. Северцев, Н. А. Безопасность и отказоустойчивость динамических систем / Н. А. Северцев. – М. : Вузовская книга, 2013. – 412 с.
6. Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы обработки данных / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М. : Мир, 1980. – 620 с.
7. Грущанский, В. А. О методах сравнения эффективности адаптивных систем с летательными аппаратами / В. А. Грущанский, Н. А. Северцев // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2011. – Т. 1. – С. 18–21.
8. Баранов, Н. А. Управление состоянием готовности системы безопасности к отражению угрозы / Н. А. Баранов, Н. А. Северцев // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2012. – Т. 1. – С. 8–10.

УДК 621.642

Северцев, Н. А.

Моделирование оценки математического ожидания дисперсии случайных функций характеристик сложной технической системы / Н. А. Северцев // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 3 (7). – С. 16–21.

Северцев Николай Алексеевич
доктор технических наук, профессор,
начальник отдела безопасности
и нелинейного анализа,
Учреждение Российской академии наук,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
(119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40)
8-(495)-135-55-08
E-mail: severcev@mail.ru

Severtsev Nikolay Alekseevich
doctor of technical scienses, professor,
head of department of safety and nonlinear analysis,
Dorodnicyn Computer Center
of the Russian academy of sciences
(119333, 40 Vavilov street, Moscow, Russia)

Аннотация. Рассмотрены методы оценки точности оценок математического ожидания и дисперсии характеристик сложных технических систем при их создании и испытаниях. Методы оценивания основываются на математических моделях с параметрами в виде случайных векторов, определяющих случайные функции, или характеристиками исследуемой системы являются случайные поля. Представлены модели характеристик исследования оценок математического ожидания и дисперсий в общем виде.

Ключевые слова: случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, модели оценок, сложная техническая система, безопасность.

Abstract. The article deals with methods of assessing the accuracy of evaluations of mathematical expectation and variance characteristics of complex technical systems as they are created and tested. Methods of estimation are based on mathematical models with parameters in the form of random vectors that define the random function, or the characteristics of the studied systems are random fields. Presents a model of research evaluation of mathematical expectation and variance of in general terms.

Key words: random variable mathematical expectation, variance, the model estimates, a complex engineering system, security.